Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 3

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

Niech (Ω, Σ, μ) będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

Przestrzeń funkcji całkowalnych w p-tej potędze:

$$L^p(\mu) := \{x : \Omega \to \mathbb{F} \text{ mierzalna} : \int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu < \infty\}$$

o wartościach w ciele $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z działaniami

$$(x+y)(t) := x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \left(\begin{array}{c} \text{działania} \\ \text{określone} \\ \text{punktowo!} \end{array} \right)$$

gdzie $x, y \in L^p(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Na przestrzeni $L^p(\mu)$ określona jest tzw. ***p*-ta norma**

$$\|x\|_p := \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Uwaga: $\|x\|_p = 0 \iff \mu(\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}) = 0 \overset{def}{\iff} x \overset{\mu\text{-pw}}{=} 0$

Twierdzenie (Nierówność Höldera)

Dla $1 < p, q < \infty$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $x \in L^p(\mu)$ i $y \in L^q(\mu)$

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

czyli

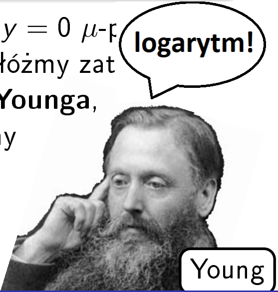
$$\int_\Omega |xy|\, d\mu \leq \Big(\int_\Omega |x|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |y|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Równość zachodzi $\iff$ $|x|^p$ i $|y|^q$ są liniowo zależne μ-pw (tzn. istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, takie, że $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ-pw)

Dowód: Jeśli $\|x\|_p = 0$, to $x = 0$ μ-pw, skąd $x \cdot y = 0$ μ-p zachodzi trywialnie. Podobnie, gdy $\|y\|_q = 0$. Załóżmy zat $\|x\|_p \neq 0$ i $\|y\|_q \neq 0$. Zastosujemy **nierówność Younga**, która mówi, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ mamy

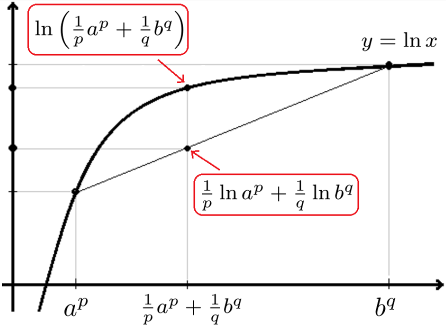
$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

a która wynika z własności logarytmu:



$$
\begin{aligned}
\ln(ab) &= \ln a + \ln b \\
&= \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \\
&\le \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right),
\end{aligned}
$$

nierówność wynika z **wklęsłości logarytmu**. Zdejmując *ln* otrzymujemy **nierówność Younga**. Równość zachodzi $\iff a^p = b^q$



Podstawiając $a = \frac{|x(t)|}{\|x\|_p}$ i $b = \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$ otrzymujemy

$$
\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p\|y\|_q} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}, \qquad \text{dla każdego } t \in \Omega.
$$

Całkując powyższą nierówność obustronnie mamy

$$
\frac{\int_\Omega |x(t)y(t)|\,d\mu}{\|x\|_p\|y\|_q} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{\int_\Omega |x(t)|^p\,d\mu}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\int_\Omega |y(t)|^q\,d\mu}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
$$

Dzieląc przez $\|x\|_p\|y\|_q$ dostajemy $\|x\cdot y\|_1 \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.

Przy czym, $\|x\cdot y\|_1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q \iff \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}$ μ-pw.

$$\|x \cdot y\|_1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q \iff \|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q \ \mu\text{-pw}$$

$$\iff |x|^p \text{ i } |y|^q \text{ są liniowo zależne } \mu\text{-pw}$$

„$\Leftarrow$" Jeśli $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ-pw, to całkując $\alpha\|x\|_p^p = \beta\|y\|_q^q$, skąd jeśli $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, to $\|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q$ μ-pw. ■

Twierdzenie (Nierówność Minkowskiego)

Dla dowolnego $p \geq 1$ oraz $x, y \in L^p(\mu)$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Minkowski

Dowód: Dla $p = 1$ dowód jest łatwy:

$$\|x+y\|_1 = \int_\Omega |x+y| \, d\mu \overset{\text{N.Trójkąta}}{\leq} \int_\Omega |x|+|y| \, d\mu = \int_\Omega |x| \, d\mu + \int_\Omega |y| \, d\mu$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Załóżmy, że $p > 1$. Niech $q := p/(p-1)$. Wtedy $1/p + 1/q = 1$. Możemy zatem zastosować nierówność Höldera!

$$\|x+y\|_p^p = \int_\Omega |x+y|^p \, d\mu = \int_\Omega |x+y| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\overset{\text{N.Trójkąta}}{\leq} \int_\Omega |x| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu + \int_\Omega |y| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\overset{\text{N.Höldera x2}}{\leq} \|x\|_p \cdot \left(\int_\Omega |x+y|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \|y\|_p \cdot \left(\int_\Omega |x+y|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{q(p-1)=p}{=} \|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/q}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p/q}.$$

Dzieląc obie strony przez $\|x+y\|_p^{p/q}$ i stąd, że $p - p/q = 1$ mamy

$$\|x+y\|_p = \frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p^{p/q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \quad \blacksquare$$

Konwencja:

W przestrzeni $L^p(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe μ-pw

(formalnie elementami $L^p(\mu)$ są klasy abstrakcji relacji $y \overset{\mu\text{-pw}}{=} x$)

Wtedy $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią unormowaną!

Tw. $L^p(\mu)$ jest przestrzenią Banacha dla każdego $p \in [1, \infty)$.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$ ciąg Cauchy. Jeżeli ciąg Cauchy posiada podciąg zbieżny, to jest zbieżny. Zatem przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\|x_n - x_m\|_p \leq (1/4)^n$ dla $m \geq n$. Połóżmy $A_n := \{t \in \Omega : |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geq (1/2)^n\}$ oraz

$$A := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = \{t \in \Omega : \forall_N \exists_{n>N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geq (1/2)^n\}.$$

Wtedy

$$(1/2)^{np} \mu(A_n) \leq \int_{A_n} \underbrace{|x_n - x_{n+1}|^p}_{\geq (1/2)^{np}} \, d\mu \leq \|x_n - x_{n+1}\|_p^p \leq (1/4)^{np},$$

skąd $\mu(A_n) \leq (1/2)^{np}$. Zatem

$$\mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{N=n}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} (1/2)^{np} \longrightarrow 0, \qquad \text{przy } N \to \infty.$$

Czyli $\mu(A) = 0$. Zauważmy dalej, że

$$t \in \Omega \backslash A \iff \exists_N \forall_{n \geq N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| < (1/2)^n$$

$$\iff \exists_N \forall_{m \geq n \geq N} |x_n(t) - x_m(t)| < \sum_{k=n}^{m} (1/2)^k \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem dla $t \in \Omega \setminus A$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy, a więc jest zbieżny. Połóżmy $x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, gdy $t \in \Omega \setminus A$, oraz $x(t) = 0$, gdy $t \in A$. Sprawdzamy zbieżność w normie:

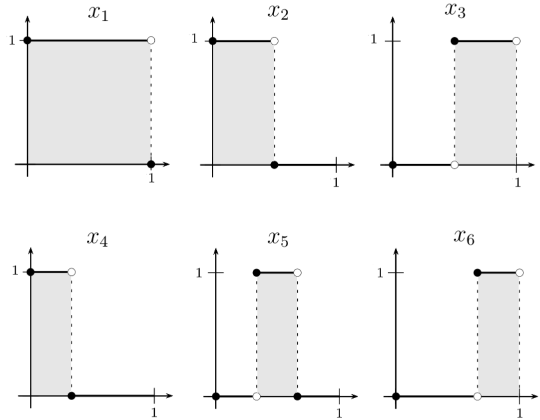
$$\|x - x_n\|_p^p = \int_\Omega |x(t) - x_n(t)|^p \, d\mu = \int_{\Omega\backslash A} \lim_{m\to\infty} |x_m(t) - x_n(t)|^p \, d\mu$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |x_m - x_n|^p \, d\mu \leq \sup_{m \geq n} \|x_n - x_m\|_p^p \leq (1/4)^{pn} \longrightarrow 0.$$

Zatem $x_n \overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} x$. W szczególności $\|x\|_p \leq \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p < \infty$, czyli $x \in L^p(\mu)$. ■

Uwaga. Z dowodu wynika, że $x_n \overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} x \implies \exists_{\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}} \; x_{n_k} \overset{\mu\text{-pw}}{\longrightarrow} x.$

Prz. (Wędrujący garb) Na przestrzeni $L^p[0,1] := L^p(\lambda)$, gdzie λ miara Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$ ustawmy ciągi k-elementowe $x_i^{(k)} = 1_{[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})}$, $i = 1,\dots,k$, $k \in \mathbb{N}$, w jeden ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:



$x_1 = 1_{[0,1)}$, $x_2 = 1_{[0,\frac{1}{2})}$,

$x_3 = 1_{[\frac{1}{2},1)}$, $x_4 = 1_{[0,\frac{1}{3})}$,

$x_5 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$, $x_6 = 1_{[\frac{2}{3},1)}$

$x_7 = 1_{[0,\frac{1}{4})}$, $x_8 = 1_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$

$x_9 = 1_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$,$x_8 = 1_{[\frac{3}{4},1)}$

$\dots$

Wtedy $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$, bo $\|x_i^{(k)}\|_p = (\int_{[0,1]} 1_{[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})}\, d\lambda)^{\frac{1}{p}} = (1/k)^{1/p} \to 0$ przy $k \to \infty$. Ale dla każdego $t \in [0,1)$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny (ma dwa punkty skupienia 0 i 1). Czyli $x_n \overset{\mu\text{-pw}}{\not\longrightarrow} 0$.

Całka względem miary liczącej, to suma!
Ciągi to funkcje na zbiorze $\mathbb{N}$ lub $\{1, ..., n\}$!

Prz. Jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ i μ jest miarą liczącą, to $L^p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, jest **przestrzenią ciągów sumowalnych w p-tej potędze**:

$$\ell^p := \left\{ x = (x(1), ..., x(n), ...) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

z działaniami po współrzędnych i normą

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Prz. Jeśli $\Omega = \{1, ..., n\}$ i μ miara licząca, to $L^p(\mu) \cong \mathbb{F}^n$ jest n-wymiarową przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Uwaga na boku

Funkcje charakterystyczne zbiorów o mierze skończonej rozpinają liniowo **przestrzeń całkowalnych funkcji prostych**

$$\mathcal{E}(\mu) := \text{lin}\{1_{A_k} : A_k \in \Sigma, \mu(A_k) < \infty\}$$
$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k} : a_k \in \mathbb{F}, \mu(A_k) < \infty, k = 1, ..., n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ponadto $\mathcal{E}(\mu)$ zawiera się w każdej z przestrzeni $L^p(\mu)$ jako gęsta podprzestrzeń liniowa (z definicji całki Lebesgue'a).

Stw.

Dla $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{E}(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ jest gęstą podprzestrzenią. Czyli $L^p(\mu) = \overline{\mathcal{E}(\mu)}^{\|\cdot\|_p}$ jest uzupełnieniem przestrzeni $\mathcal{E}(\mu)$ w normie

$$\|x\|_p := \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$